

Ensino da Série de Taylor: Conceituar, manipular e Aplicar

RENATO ESTEVES MARIA¹, RAFAEL NOGUEIRA LUZ²

¹ Graduando em Licenciatura em Matemática, IFSP, Campus Caraguatatuba, renato.esteves@aluno.ifsp.edu.br.

² Professor Mestre do curso de Licenciatura em Matemática, IFSP, Campus Caraguatatuba, rafaelnogueira@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Métodos e Técnicas de Ensino - 7.08.04.02-8

RESUMO: No século XVII foi desenvolvida uma das mais poderosas ferramentas da matemática. O Cálculo diferencial e integral mudou a matemática e mostrou utilidade em diversas ciências, devido a isso, no período seguido de seu desenvolvimento, ocorreu uma busca desenfreada de aplicações e propriedades. Consequentemente, a época foi marcada pela falta do rigor lógico necessário para sustentar as descobertas na área. A necessidade posterior de formalizar o cálculo e suas propriedades fomentou o desenvolvimento da teoria dos limites, onde as sequências e as séries assumiram um importante papel. Com a formalização das séries tornou-se possível elaborar ferramentas para examinar propriedades, como a continuidade, a diferenciabilidade e as aproximações numéricas, de algumas das funções mais importantes da matemática. Este trabalho visa desenvolver um material acessível, com as principais demonstrações a respeito da Série de Taylor, contextualizando historicamente o tema e trazendo exemplos de aplicações. Pretendemos investigar os limites e possibilidades da utilização das Séries de Taylor como tópico estimulador para o ensino de conhecimentos avançados de matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Série de Taylor; aplicação; contextualização; demonstração;

1 INTRODUÇÃO

De acordo com Eves (2004) o cálculo diferencial e integral está entre uma das maiores invenções do século XVII e possibilitou solucionar problemas que antes eram impossíveis. Pela sua surpreendente aplicabilidade, o tópico atraiu a maior parte dos matemáticos da época resultando em uma abundância de trabalhos despreocupados com o estado insatisfatório dos fundamentos lógicos do mesmo. Leonhard Euler (1707-1783), um dos maiores matemáticos e físicos teóricos de sua época, escreveu em 1748 dois volumes de seu *Introductio in analysin infinitorum* que estabeleceu padrões mais rigorosos ao cálculo, por exemplo, no segundo volume, distingue entre funções contínuas e descontínuas (ÁVILA, 1985). Apesar disso, de acordo com Silva e Gazzoni (2016), Euler era descuidado com séries infinitas, utilizando procedimentos sem as devidas justificativas formais, não correspondendo ao rigor matemático atual.

As séries, assim como as sequências são dois tópicos importantes dos cursos mais avançados de Cálculo, além de serem abordadas em análise, e terem relevância para o desenvolvimento formal do Cálculo. A presente proposta visa trazer alternativas de demonstrações sobre a série de Taylor, sua contextualização histórica e aplicações da

teoria, tendo em vista que “As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro” (LAGES, 1999, p.2), e que para chegar na aplicação é preciso ter assimilado bem a conceituação e a manipulação matemática, envolvidas na teoria estudada. Do ponto de vista da contextualização histórica, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam que:

O conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores [...] conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção dos conceitos é de grande utilidade para que o professor compreenda melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos (BRASIL, 1997, p. 30).

Os componentes curriculares relacionados com a matemática “pura” e “analítica” tem se apresentado como desafio para os formandos, sendo os índices de reprovação nessas disciplinas altos. E, pensando a importância das séries de potência na matemática “pura” por conta da analiticidade das funções elementares, bem como na matemática “aplicada” por conta dos polinômios de Taylor e aproximações geradas por eles. Pretendemos pesquisar qual a relevância de apresentar as séries de Taylor de maneira contextualizada e fundamentada, para futuros professores e interessados no tema.

Por natureza a matemática pura e aplicada apresenta dificuldade para os alunos e existem poucas ações sendo desenvolvidas para auxiliar o professor do ensino superior nessas disciplinas, em contrapartida, temos acesso a uma diversidade maior de experiências e materiais didáticos produzidos voltados para o ensino básico. Uma questão relevante para a pesquisa é: como apresentar as séries de potências e consequentemente a série de Taylor, que tem um grau altíssimo de importância no ramo das funções analíticas, de modo que auxilie o aprendizado satisfatório e significativo por parte dos alunos? Diante do questionamento, buscaremos uma sequência que propicie o aprendizado do aluno, que será construída baseada nas demonstrações, contextualizações históricas e aplicações da série de Taylor.

De acordo com os PCNs (1997) “A História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática. ” (Brasil, 1997, p.34). Visto isso, indagamos: qual a importância dos futuros professores terem experiências diferenciadas, nos componentes curriculares relacionados a tópicos avançados, durante a sua formação inicial?

Nos livros didáticos de cálculo, além de encontramos diversos exercícios onde o conteúdo é usado, temos poucas notas históricas sobre a descoberta do mesmo, sem trazer o porquê daquele conceito ter recebido destaque e o tamanho de sua importância naquele momento histórico e na atualidade. Visto isso, o material produzido e as oficinas podem ser pensados como um complemento dos livros didáticos e um incentivador para estudantes de matemática que gostariam de se aprofundar no tema.

2 TEORIA

Como foi proposto até o presente momento, houve um levantamento do referencial bibliográfico a respeito da história do Cálculo Diferencial e Integral com ênfase na história da série de Taylor, a partir dos livros “História da Matemática” de Carl B. Boyer e “Introdução à história da matemática” de Howard Eves, os dois problemas que levam à invenção do cálculo infinitesimal: as quadraturas e as tangentes, onde o problema das quadraturas (áreas e volumes) inicialmente era resolvido por Arquimedes usando o método de exaustão. Entretanto, o problema da determinação tangente a uma curva foi resolvido por Apolônio (262-190 a.C.) para as seções cônicas, sem aprofundamento, até que no século XVII surgiram outros métodos, sendo eles apresentados por: Descartes em *la Géométrie* (1637), Fermat em uma carta a Marin Mersenne (1638) e Roberval em uma carta a Mersenne (1644).

Desta forma, no final do século XVII, Gottfried Wilhelm Leibniz publicou nos *Acta eruditorum* o artigo “Novos métodos para máximos e mínimos, assim como tangentes, os quais não são obstruídos por quantidades fracionárias e irracionais, e um cálculo notável para eles”. Depois dessa publicação, Isaac Newton aparece defendendo que tinha elaborado uma teoria análoga à de Leibniz que, todavia, publicou só depois, logo a história do cálculo entra em uma polêmica que não entraremos em detalhes, pois a “opinião generalizada hoje é que ambos criaram o cálculo independentemente.” (EVES, 2004, p.444). Wallis teve a ideia de trabalhar com expoentes fracionários, mas coube a Newton oferecer as expansões como parte de seu método de séries infinitas, criando assim o teorema binomial.

A importância em cálculo das séries infinitas surge da ideia de Newton da representação de funções como somas de séries infinitas, desta maneira a série de potência é uma série infinita de termos variáveis. Assim, a teoria desenvolvida para séries infinitas de termos constantes pode ser estendida para a análise de convergência de séries de potências. As séries de potências podem ser usadas em várias aplicações, por exemplo,

como encontrar aproximações de números irracionais tais como $\sqrt{2}$, π e o número de Euler.

Existem diversas aplicações dentro da matemática, mas existem também aplicações da série de Taylor em diferentes ramos das ciências naturais, sendo elas na engenharia e na física como exemplo “(...)relatividade, óptica, radiações de corpos negros, dipolos elétricos, velocidade das ondas de água, e na construção de rodovias no deserto.” (STEWART, 2013, p.692)

3 MATERIAL E MÉTODOS

Foram previstas três oficinas de duas horas cada, com objetivo de verificar às possibilidades de utilização da Série de Taylor como um tópico estimulador para o ensino da matemática. Para sabermos o impacto das oficinas, aplicaremos ao final de cada encontro um questionário. Os questionários terão questões abertas e fechadas, com a finalidade de coletar informações sobre o “avanço” dos participantes com relação aos conteúdos trabalhados no decorrer dos encontros.

Iniciaremos o trabalho com a aplicação de um questionário que tem por objetivo diagnosticar aquilo que os participantes sabem de séries de potências e a série de Taylor, tanto de conceito, “demonstração”, aplicações e contexto histórico, para analisarmos as dificuldade e percepções que os mesmos têm em relação a séries. O primeiro questionário conterá questões que pretendem suscitar questionamentos sobre noções de séries.

Os questionários aplicados nas oficinas serão utilizados para gerar dados sobre o aproveitamento dos participantes, e também acompanhar os conceitos de séries infinitas se tornaram mais compreensíveis e amplos com os estudos da Série de Taylor.

As seis oficinas serão divididas em três partes, a cada dois encontros pretende-se discutir o contexto histórico, a formalização da Séries de Taylor e as aplicações geradas por. Nas oficinas serão utilizados materiais de suporte, como softwares e material concreto.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

No momento o trabalho está na fase de estudo e análise das referências bibliográficas sobre o tema. As oficinas estão em andamento, mas ainda não ocorreram em sua totalidade, dessa maneira, os dados que serão utilizados para análise e discussão da proposta ainda são insuficientes.

Na elaboração das oficinas e questionários foi possível perceber a importância da construção de materiais e propostas que permitam que os participantes questionem sobre seus conhecimentos em relação as séries infinitas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a pesquisa bibliográfica houve dificuldade em encontrar materiais que dessem suporte a proposta, há uma escassez de materiais na área de demonstrações e principalmente na aplicação da Série de Taylor. Este trabalho tem o intuito de produzir conteúdo relacionado ao assunto e estimular que outros pesquisadores desenvolvam sobre o tema e alcance alunos e professores de graduação, para que os mesmos, possam se aprofundar e melhorar seus conhecimentos.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. Evolução dos conceitos de função e de integral. **Matemática Universitária**, n. 1, p. 14–46, 1985.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2004.

LIMA, Elon Lages. Conceituação, manipulação e aplicações: Os três componentes do ensino da Matemática. **Rpm**, Rio de Janeiro, v. 41, p.1-6, 1999. Disponível em: < http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_II/pdf/rpm41.pdf > Acesso em: 05 junho 2019.

SILVA, Ana Maria Costa; GAZZONI, Alcibiades. Questões relacionadas a certas séries. **Disciplinarum Scientia - Naturais e Tecnológicas**, v. 1, n. 1, p. 21–28, 2016.

STEWART, James. **Cálculo, volume 2**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. P. 526 – 1044.