OS AXIOMAS DE PEANO E O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

DÉRICK ALVES DE JESUS[1], RAFAEL NOGUEIRA LUZ[2]

1 Graduando em Licenciatura em Matemática, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Câmpus Caraguatatuba, derickalves55@gmail.com
2 Mestre em matemática pelo IMPA, Professor do IFSP Câmpus Caraguatatuba, rafaelnogueira@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Teoria dos Números – 1.01.01.03-9

RESUMO: Este trabalho tem por objetivo analisar o impacto da axiomática de Peano, usada na formalização dos números naturais, para a conceitualização do princípio da indução finita e auxiliar na compreensão de o que é e como funcionam as demonstrações e definições por indução. Para tanto foi desenvolvido material teórico contendo a construção de maneira acessível. Dado o caráter teórico do conteúdo, o material foi desenvolvido para ser trabalhado com estudantes de cursos superiores, do IFSP Câmpus Caraguatatuba, da área de matemática ou áreas afins. Para tanto estão planejados encontros, e nestes, atividades e questionários periódicos sobre o tema proposto para avaliar como se deu o processo de aprendizagem.

PALAVRAS-CHAVE: números naturais; axiomas de peano; indução finita.

1 INTRODUÇÃO

Ao estudar o desenvolvimento histórico da matemática é possível identificar por meio de quais problemas ela amadureceu como área de estudo. Como dito por Garbi (2006) matemática, em suas raízes, se tratava do estudo de entes e formas reais, onde os processos empíricos (e indutivos) seguidos até então eram satisfatórios para descrever o comportamento dos eventos observados, mas não a causa. Dado isto os “métodos demonstrativos”, por trazerem explicações plausíveis de como e porque as propriedades, em especial, dos entes matemáticos ocorriam, passaram a ser amplamente utilizados.

Entre 600 a.C e 300 a.C, foi desenvolvido o raciocínio postulacional dedutivo que trouxe a sistematização de demonstrações matemáticas a partir de decorrências lógicas, partindo de suposições classificáveis como verdadeiras ou falsas e definições claras, que possibilitaram uma sequência de deduções rigorosas. Porém, para tanto era necessário uma formalização que, nas palavras de Silva (2007), é “[. . .]o processo de desvestimento de significados que gera uma teoria formal a partir de uma teoria interpretada” (p. 186). O processo de formalização, utilizando ferramentas da lógica formal, é essencial, pois torna as demonstrações mais precisas e evita ambiguidades.

Ou seja, ela é necessária para tornar os fundamentos lógicos das estruturas matemáticas mais rigorosas e evitar uma crise nestes, como ocorreu com o desenvolvimento das geometrias não euclidianas e mudanças profundas em diversas áreas da matemática datadas a partir do século XVIII.

Grosso modo podemos dizer que a matemática estuda grandezas e formas. Em relação as grandezas vê-se que conjunto dos números naturais é o conjunto numérico mais básico que existe e, de acordo com Ferreira (2011), podemos construir os inteiros não positivos com base na estrutura aritmética que temos em $\mathbb{N}$, através de noções básicas de Teoria de Conjuntos e de relações equivalência. Dado isso, os matemáticos podem construir formalmente, com os inteiros, o conjunto dos números racionais, e deste formalizar o conjunto dos reais, e "[. . .] portanto o grosso da matemática pode ser reduzido de um conjunto de postulados para o sistema dos números naturais" (EVES,2002, p. 611). É importante salientar que este processo de extensões sucessivas do conceito de número pode gerar outros conjuntos além dos reais.

Para a construção de uma formalização matemática precisamos saber que

> [. . .] provar um teorema em um sistema dedutivo consiste em demonstrar que o teorema é uma consequência lógica necessária de algumas proposições anteriormente provadas; estas, por sua vez, devem ser elas próprias provadas; assim por diante [. . .] a menos que, nesta regressão, fosse permitido parar em algum momento. Assim deve haver uma série de afirmativas, chamadas postulados. (COURANT e ROBBINS, 2000, p. 249).

Ou seja, é necessário admitir algumas "verdades" e com base nelas demonstrar outras afirmações (propriedades). Essas verdades também são denominadas *axiomas*. A formalização axiomática dos naturais foi feita por Giuseppe Peano (1858-1932) em 1889 na obra intitulada *"Arithmetica principia nova methodo exposita"* em que Peano não se prendeu em analisar o que os números naturais são, mas as propriedades que eles gozam.[1]

A proposta de formalização de Peano tem uma excepcional importância histórica e utiliza o chamado *princípio da indução finita*, que está "[. . .] implícito em todos os argumentos onde se diz 'e assim por diante'"(LIMA, 2016 , p. 35). Assim sendo, utilizá-la traz, além de um primeiro contato com uma estrutura axiomática, uma visão diferente das construções e demonstração por indução.

Os relatos de Silva e Savioli (2007, 2012) mostram que é comum os estudantes de licenciatura em matemática utilizarem a demonstração por indução de maneira mecânica e não questionarem o porquê da realização dos três principais procedimentos que garantem a demonstração. Estes relatos por sua vez também mostraram que após a realização da discussão sobre a construção de Peano, houve uma maior compreensão, por parte dos envolvidos, da indução matemática e como ela difere da indução empírica.

2 MATERIAL E MÉTODOS

Como referência para a elaboração da construção axiomática dos números naturais foram usados livros publicados pela Sociedade Brasileira de Matemática, pelo IMPA além de teses de mestrado e artigos publicados na área.

A escolha de como estruturar a axiomática para abordar a construção axiomática dos números seguiu a ordenação do livro A Construção dos Números, e os axiomas de Peano foram apresentados de maneira muito similar ao mesmo, como mostrado na imagem abaixo.

FIGURA 1. Os axiomas de Peano

São dados, como objetos não-definidos, um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*, e uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número $s(n)$, valor que a função assume no ponto n , é chamado *sucessor* de n.

Axioma 2.1.1 (AXIOMAS DE PEANO). *A função* $\boldsymbol{s}$ *satisfaz aos seguintes axiomas:*

A_1) *s é injetora;*

A_2) *Existe um elemento de* $\mathbb{N}$, *que denotaremos por 0, e chamaremos de zero, que não está na imagem de s, isto é,* $0 \notin Im(s)$*;*

A_3) *(Princípio da indução) Se* $X \subset \mathbb{N}$ *é um subconjunto que satisfaça (i) e (ii) abaixo, então* $X = \mathbb{N}$*:*

i) $0 \in X$;

ii) $k \in X \Rightarrow s(k) \in X$.

Serão realizados nove encontros, com duas aulas de 50 minutos cada, sendo previsto que os mesmos sejam entre os meses de agosto e outubro, e divididos em quatro partes com questionários ao final de cada parte. O material de apoio desenvolvido deverá ser diretamente utilizado em sala para direcionar o teor de cada encontro e disponibilizado (ao final dos encontros).

Os questionários serão realizados utilizando a ferramenta de estruturação de formulários do Google e aplicados ao final de cada parte, sendo que o primeiro usado como uma ferramenta diagnóstica. Nestes constarão perguntas abertas e fechadas que serão direcionadas tanto em análises qualitativas — sobre o conhecimento prévio dos alunos, sobre o que é uma demonstração, as características da matemática como ciência e as diferenças entre indução empírica e matemática — quanto em análises quantitativas com o objetivo de avaliar as dificuldades apresentadas e levantar pautas sobre a metodologia das aulas.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A coleta de dados será feita através dos questionários e da observação direta durante a realização das aulas, como as mesmas estão propostas para os meses de agosto a outubro, até o momento não existem dados completos, e dessa maneira, o trabalho — até o momento — está limitado a revisão bibliográfica.

Com esta revisão pode-se compilar várias demonstrações indutivas e também trabalhar diversas outras formas de demonstração e conceitos algébricos relevantes para a compreensão de aspectos centrais em outras áreas da matemática, possibilitando uma experiência mais ampla.

O material foi desenvolvido de forma a buscar demonstrações autocontidas, ou seja, demonstrações que não utilizem uma quantidade excessiva de ferramentas não antes definidas de maneira a torna-lo mais acessíveis ao leitor.

4 CONCLUSÕES

Durante o desenvolvimento do material foi possível inferir a respeito da importância de materiais rigorosos, mas com demonstrações completas e acessíveis para facilitar a inclusão de estudantes à matemática pura.

Em relação às referências utilizadas foi possível perceber que apesar do papel central das estruturas axiomáticas para a formalização da ciência matemática, existe uma escassez de trabalhos direcionados ao uso dos axiomas de Peano — com relação à construção dos números naturais — utilizados como ferramenta para a inserção da indução finita. Espera-se que este trabalho traga uma maior visibilidade ao tema e estimule novos projetos com esse direcionamento.

REFERÊNCIAS

COURANT, Richard, ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática?**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

EVES, Howard Whitley. (1990). **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues.3. ed Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2002.

FERREIRA, Jamil. **A Construção dos Números.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 133 p.

GARBI, Gilberto Geraldo (2006). **A Rainha das Ciências**: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 5. Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

SAVIOLI, Angela Marta Pereira das Dores. **Uma Reflexão sobre a Indução Finita:** relato de uma experiência. *Bolema: Mathematics Education Bulletin, Bolema: Boletim de Educação Matemática* 20.27 (2008).

SILVA, Eduardo Machado da; SAVIOLI, Angela Marta Pereira das Dores. **O Conceito de Indução Finita na Compreensão de Estudantes de Um Curso de Matemática**. ALEXANDRIA, v.5, n.3, p.127-148. 2012.

SILVA, Jairo José da. **As filosofias da Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007.