

O uso das Geometrias não-euclidianas – Hiperbólica e Elíptica - como facilitadoras da compreensão de conceitos geométricos

DÉRICK ALVES DE JESUS¹, RAFAEL NOGUEIRA LUZ²

1 Graduando em Licenciatura em Matemática, IFSP, Câmpus Caraguatatuba, derickalves55@gmail.com

2 Docente do Curso de Licenciatura em Matemática, IFSP, Câmpus Caraguatatuba, rafaelnogueira@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Métodos e Técnicas de Ensino – 7.08.04.02-8

RESUMO: A geometria estruturada axiomáticamente pelos antigos gregos, compilada por Euclides e mais recentemente formalizada por Hilbert é chamada de Geometria Euclidiana. São chamadas Geometrias não-Euclidianas as que não utilizam os axiomas usuais da Geometria Euclidiana. Este artigo tem por objetivo apresentar os resultados parciais de um trabalho de iniciação científica desenvolvido para investigar as possibilidades e limites da utilização das Geometrias Não-Euclidianas, mais especificamente Hiperbólica e Elíptica, no ensino de conceitos geométricos. Pesquisas recentes apontam para necessidade de melhorias no Ensino de Geometria no Brasil. A proposta pretende produzir material de suporte, aplicá-lo em oficinas com futuros professores de matemática e pessoas interessadas na temática e analisar seus resultados. As oficinas ocorrerão em quatro dias, com duas horas-aula de duração. Em cada encontro será aplicado um questionário. Com o desenvolvimento do trabalho pretende-se trazer propostas que aproximem a matemática universitária da matemática elementar, a fim tornar os conceitos contextualizados aos parâmetros atuais.

PALAVRAS-CHAVE: geometria; não-euclidianas; ensino.

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Euclidiana plana, utilizando a formalização de Hilbert, possui seis termos indefinidos e cinco conjuntos de axiomas¹ onde um deles é unitário e chamado *Axioma das paralelas*. Tal axioma é equivalente ao chamado *quinto postulado de euclides* que diz que “Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça ângulos interiores e de mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado qual estão menores do que dois retos” (BICUDO et al., 2009, p. 98). Segundo Eves (2011), um equivalente a esse postulado foi desenvolvido por John Playfair que diz que “por um ponto fora de uma reta dada não há mais que uma reta paralela a essa reta”.

Segundo Andrade (2013), os quatro primeiros postulados foram tomados e validados empiricamente, porém o quinto não podia ser validado desta forma. A validação empírica era utilizada devido ao fato de que a Geometria era aplicada, por exemplo, na arquitetura e agronomia. Euclides, em seu *Elementos* evita utilizar o quinto postulado nas primeiras 28 proposições. Acredita-se que ele buscava demonstrar o quinto postulado por meio dos outros quatro, por isso evitava utilizá-lo nas primeiras demonstrações. Se isso fosse possível, este não seria um postulado, mas uma proposição.

¹ Chamados de axiomas de Incidência, Ordem; Congruência e Continuidade e axioma das paralelas.

Giovanni Saccheri (1667-1733), também questionou a natureza do quinto postulado e por conta disso decidiu tentar prová-lo por *reductio ad absurdum* e assim, sem se dar conta, possibilitou que matemáticos como Lobachevsky, Gauss e Riemann “descobrissem” geometrias onde o postulado das paralelas não é válido. Essas são chamadas Geometrias não-Euclidianas, sendo “[...] assim chamadas porque não estão de acordo com, pelos menos, um dos cinco postulados de Euclides” (LOVIS; FRANCO, 2015, p.377). Coutinho (2001) descreve que de acordo com a substituição que se faz do postulado das paralelas surgem dois tipos clássicos de Geometrias não-Euclidianas: a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica. Deste modo, é perceptível que “[...] o desenvolvimento de conceitos geométricos seguiu um crescimento natural de sofisticação” (TALL, 2004, p. 282).

Em relação ao ensino de Geometria, apesar desta ser um dos ramos da Matemática que mais se aproximam da realidade, é marginalizada no Ensino Básico. Pavanello (1993) indica que a dificuldade dos discentes seria decorrência do despreparo da maioria dos licenciados, que geralmente optam pela aplicação de conteúdos da Álgebra ou da Aritmética, evidenciando a formação deficiente em conteúdos e metodologia no ensino de Geometria. De acordo com Rangel, Giraldo e Maculan (2014), para Klein o professor não somente deve ter um domínio pleno sobre os conceitos que ensina, como também a capacidade de relacioná-los e situá-los no panorama da Matemática atual.

Ensinar geometria pode, para Pavanello (1993), propiciar um pensamento crítico e autônomo. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) nos trazem também que a geometria estimula a observação e percepção de semelhanças. Krause (1986) afirma que com as geometrias não-euclidianas seria possível compreender melhor algumas relações matemáticas e conceitos da própria geometria euclidiana. Sendo assim, é visível que o ensino de Geometria é de suma importância, tanto no ensino básico como no ensino superior.

Para aplicação das oficinas que serão ofertadas, estas serão livres para todos os interessados. Porém, por conta da especificidade do tema, é previsto que a maioria destes sejam estudantes de licenciatura em Matemática ou Física. Segundo Ribeiro (2012, p.33 apud GOMES, 2017, p. 306) “[...] há muitos motivos para que um especialista tenha conhecimento destas estruturas”. Evidenciando a relevância do tema para grande parte dos participantes.

Pode-se destacar o fato da existência de modelos de geometrias não euclidianas, como disco de Poincaré, em que é possível verificar “todos os postulados da geometria hiperbólica com o uso, apenas, da geometria euclidiana” (SANTOS, 2016, p.51). Deste modo as geometrias se mostram intimamente ligadas, o que pode reforçar os motivos para a aprendizagem de outras geometrias.

Desse modo, a pesquisa em geometrias não-euclidianas - hiperbólica e a elíptica - surgem como possibilidade de melhoria no ensino e na aprendizagem não apenas de conceitos geométricos, mas também de conceitos de outras áreas da matemática. Com isso, busca-se analisar essas possibilidades, ou seja, investigar a utilização das Geometrias Hiperbólica e Elíptica como ferramenta para facilitar o ensino de conceitos geométricos. Exemplos destes conceitos seriam a caracterização de retas, transformações geométricas e definições. Para tal, é proposto analisar tais potencialidades por meio da análise de dados.

As oficinas e a aplicação dos formulários estão previstos para setembro e a análise de dados para outubro, deste modo os resultados aqui presentes são parciais, relativos à revisão bibliográfica e de conteúdo.

2 MATERIAL E MÉTODOS

O desenvolvimento de um material de apoio teórico com base no levantamento bibliográfico, bem como seu uso em oficinas, está objetivando a utilização das geometrias

Hiperbólica e Elíptica como ferramenta no ensino de conceitos geométricos para análise posterior de seu impacto na aprendizagem.

As oficinas serão realizadas no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Câmpus Caraguatatuba, durante o mês de Setembro de 2018, com alunos do Curso de Licenciatura de Matemática e pessoas interessadas no tema. Serão quatro oficinas com encontros semanais de duas horas/aula (uma hora e quarenta minutos) cada.

Pretende-se aplicar questionários abertos e fechados para assim analisar os conceitos geométricos prévios e confrontá-los com os dados durante e posteriores às oficinas (sendo aplicado um a cada encontro), a fim de acompanhar as mudanças conceituais e percepções momentâneas dos participantes. Os questionários serão realizados utilizando a ferramenta de estruturação de formulários do Google e aplicados ao final de cada encontro, sendo que o primeiro usado como uma ferramenta diagnóstica.

O material foi desenvolvido de modo a ser abrangente e interdisciplinar, com considerações formais e informais, apresentando alguns dos principais teoremas, demonstrações, e buscando aplicações e impactos das geometrias não euclidianas em outras ciências, outras áreas da Matemática (como números complexos, cálculo diferencial e integral) e na arte.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A coleta de dados ocorrerá através dos questionários e da observação direta durante a realização das oficinas. Como as mesmas estão previstas para o mês de Setembro, até o momento não foram recolhidos dados empíricos e dessa maneira o trabalho é — até o momento — limitado à revisão bibliográfica.

A fase de levantamento bibliográfico para o desenvolvimento do material a ser utilizado nas oficinas foi concluída. Com ela percebe-se que existe uma ampla diversidade de trabalhos acessíveis que abordam o tema sob diversos ângulos, muitos utilizando softwares livres e gratuitos para a verificação de propriedades de modo dinâmico.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base na revisão da literatura, nota-se que ensinar geometria é essencial para a formação do cidadão. Para as geometrias não-euclidianas é relevante em especial para a formação de especialistas em ciências exatas e a diversidade de trabalhos na utilização de outras geometrias no ensino de conceitos geométricos sugerem que o tema é atual e relevante para o ensino de Geometria.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Plácido. **Introdução à Geometria Hiperbólica**: Modelo de Poincaré. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 267 p.

LOVIS, Karla Aparecida; FRANCO, Valdeni Soliane. As Concepções de Geometrias não Euclidianas de um Grupo de Professores de Matemática da Educação Básica. **Boletim de Educação Matemática**, v. 29, n. 51, p. 369-388, 2015.

BICUDO, Irineu et al. **Os elementos**. São Paulo: UNESP, 2009. 600 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

COUTINHO, Lázaro. **Convite às geometrias não-euclidianas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

EVES, Haward W. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Unicamp, 2011.

GOMES, Lucas Ferreira; DE OLIVEIRA ARAMAN, Eliane Maria; ROCHA, Zenaide de Fátima Dante Correia. Professores de Matemática e suas Compreensões a Respeito das Geometrias Não Euclidianas. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, v. 17, n. 4, p. 301-309, 2017.

KRAUSE, Eugene. **Taxicab geometry**: an adventure in non-euclidean geometry (reprinted from 1975). New York: Dover, 1986.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Revista Zetetiké**, ano 1, n. 1, p. 7-17. UNICAMP.

TALL, David O. Thinking Through Three Worlds of Mathematics. **International Group for the Psychology of Mathematics Education**, 2004. vol. 4, pp. 281–288.

RANGEL, Leticia; GIRALDO, Victor; MACULAN, Nelson. Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo–Estabelecendo Relações. **Professor de Matemática Online**, p. 2319-023, 2014.

SANTOS, Wellington Tavares dos. **A história do quinto postulado, as geometrias não-euclidianas e suas implicações no pensamento científico**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível em: < <http://www.repositorio.furg.br/bitstream/handle/1/7427/2016-2%20-%20Wellington%20dos%20Santos.pdf?sequence=1>> Acesso em: 09/10/2018